

第五章 数列

5.1 数列基础

5.1.1 数列的概念

刷基础

1. B 【解析】由数列的定义得数列是指按照一定次序排列的一列数,而不能是图形、文字、向量等,故选 B.

2. BD 【解析】A 选项,有穷数列的项数是有限的,故 A 错误;B 选项,数列的项的序号均为正整数,则若将项的序号作为横坐标,项作为纵坐标画在平面直角坐标系中,相应图象为一系列孤立的点,故 B 正确;C 选项,数列中的项并不完全相同,因此不为常数列,故 C 错误;D 选项,数列的项的序号均为正整数,项的序号与项一一对应,且分为有穷数列与无穷数列,则数列可看作定义在正整数集(或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$)上的函数,故 D 正确. 故选 BD.

3. CD 【解析】选项 A:数列是按一定顺序排列的一列数,具有有序性,数列 1, 2, 3 与数列 3, 2, 1 的顺序完全不同,因此是两个不同的数列, A 选项错误;选项 B:集合中的元素具有互异性,而数列中的项可以重复,例如常数列 2, 2, 2, ..., B 选项错误;选项 C:例如,数列 1, -1, 1, -1, ... 的通项公式可以是 $a_n = (-1)^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}_+$),也可以是 $a_n = \cos[(n-1)\pi]$ ($n \in \mathbf{N}_+$),或者表示成 $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数,} \\ -1, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ C 选项正确;

→ 敲黑板:通项公式可以是分段表示的形式,且每一段合在一起表示的才是完整的一个数列的通项公式

选项 D:函数 $f(x) = 2.025^x$ 是指数函数,底数 $2.025 > 1$,故 $f(x)$ 是增函数,数列 $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$ 是自变量为正整数时对应的取值,所以是递增数列, D 选项正确. 故选 CD.

名师点拨 数列与集合的区别

- (1) 数列中的项可以相同,集合中的元素不可以相同;
- (2) 数列中的项是有序的,集合中的元素是无序的.

4. B 【解析】由 $n(n-1) = 110$, 得 $n^2 - n - 110 = 0$, 又 $n \in \mathbf{N}_+$, 解得 $n = 11$, 所以 110 是该数列的第 11 项. 故选 B.

5. B 【解析】观察数列 $\frac{1}{4}, \frac{3}{9}, \frac{5}{16}, \frac{7}{25}, \dots$,
分子: 1, 3, 5, 7, ..., 其与项的序号 n 的关系为 $2n-1$;
分母: $4 = 2^2, 9 = 3^2, 16 = 4^2, 25 = 5^2, \dots$, 其与项的序号 n 的关系为 $(n+1)^2$,
故数列的通项公式为 $a_n = \frac{2n-1}{(n+1)^2}$, 第 8 项为 $a_8 = \frac{2 \times 8 - 1}{(8+1)^2} = \frac{15}{81} = \frac{5}{27}$, 故选 B.

6. $n^2 - n + 1$ 【解析】根据题中图形得出规律为:第 n 个图形是以一个点为中心向 n 个方向各延展出 $n-1$ 个点,因此它有 $n(n-1) + 1 = n^2 - n + 1$ 个点.

链接教材 本题是教材第 8 页练习 B 第 4 题的同类试题. 此类与图、表结合求数列通项公式或某一项的题目,关键在于找到相邻图形之间的联系以及变化规律,利用递推关系求解.

7. AD 【解析】对于 A, $a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, 则有 $a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, 因此该数列是递增数列,故 A 正确;

对于 B, $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, 则有 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$,

因此该数列是递减数列,故 B 错误;对于 C, $a_n = n^2 - 3n, a_1 = 1 - 3 = -2, a_2 = 4 - 6 = -2$, 因此该数列不是递增数列,故 C 错误;

对于 D, $a_n = 2^n$, 函数 $y = 2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,因此该数列是递增数列,故 D 正确. 故选 AD.

规律方法 判断数列的单调性一般利用 $a_{n+1} - a_n$ 与 0 的大小关系或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 与 1 的大小关系来确定.

8. BC 【解析】根据题意,在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = n^2 - 5n + 4 = \left(n - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}, n \in \mathbf{N}_+$, 根据二次函数的单调性得数列 $\{a_n\}$ 的最小项是第 2 项和第 3 项. 故选 BC.

特别注意 在利用函数的单调性研究数列中的最大(小)项问题时,需要注意数列通项公式中的 $n \in \mathbf{N}_+$, 可能存在两项同时为最大(小)项的情况.

9. A 【解析】因为 $a_n = \frac{kn-1}{n+2} = \frac{k(n+2)-2k-1}{n+2} = k - \frac{2k+1}{n+2}$, 且数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 所以对任意的 $n \in \mathbf{N}_+, a_{n+1} < a_n$, 即 $k - \frac{2k+1}{n+3} < k - \frac{2k+1}{n+2}$, 可得 $\frac{2k+1}{n+2} - \frac{2k+1}{n+3} = \frac{2k+1}{(n+2)(n+3)} < 0$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立, 所以 $2k+1 < 0$, 解得 $k < -\frac{1}{2}$, 故实数 k 的取值范围为

$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$. 故选 A.

刷易错

★易错点 忽略数列的单调性与函数的区别而致错

10. C 【解析】已知 $a_n = \begin{cases} -n^2 + 2\lambda n, & n \leq 3, \\ 4n-1, & n > 3, \end{cases}$
当 $n > 3$ 时, $a_n = 4n-1$, 由一次函数 $y = 4x-1$ 的单调性易知 $\{a_n\}$ 为递增数列;
当 $n \leq 3$ 时, $a_n = -n^2 + 2\lambda n$, 则有 $a_1 = 2\lambda-1, a_2 = 4\lambda-4, a_3 = 6\lambda-9$, 又 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则有 $a_3 > a_2, a_2 > a_1$,
即 $\begin{cases} 6\lambda-9 > 4\lambda-4, \\ 4\lambda-4 > 2\lambda-1, \end{cases}$ 解得 $\lambda > \frac{5}{2}$,
同时分段点处需满足 $a_3 < a_4$,
即 $-9+6\lambda < 4 \times 4 - 1 \Rightarrow 6\lambda < 24, \lambda < 4$.

综上, 实数 λ 的取值范围是 $\left(\frac{5}{2}, 4\right)$. 故选 C.

易错警示 本题要注意分段数列与分段函数的区别, 分段函数的单调性不但要求各段函数的单调性保持一致, 而且还要使分界点处两函数的单调性与整体保持一致.

5.1.2 数列中的递推

刷基础

1. C 【解析】由题意得, $a_2 = a_1 + 2 + 2 = 6$, $a_3 = a_2 + 3 + 2 = 11, a_4 = a_3 + 4 + 2 = 17, a_5 = a_4 + 5 + 2 = 24$. 故选 C.

2. A 【解析】∵ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$, $a_{n+1} = \frac{a^2-2}{a_n+1} (n \in \mathbf{N}_+)$, ∴ $a_2 = \frac{a^2-2}{a+1}$.
∵ 数列 $\{a_n\}$ 是常数列, ∴ $a = \frac{a^2-2}{a+1}$, 解得 $a = -2$. 故选 A.

3. B 【解析】由递推关系式及 $a_2 = 1$ 可知, $a_1 a_2 - a_4 = a_3 - a_2 a_3 = a_3 - a_3 = 0$. 故选 B.

多种解法 不妨设 $a_1 = t, \therefore a_2 = 1$, 由递推关系式可得 $a_3 = t, a_4 = t$,
∴ $a_1 a_2 - a_4 = t \times 1 - t = 0$.

4. B 【解析】由 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ 可得,
 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,
则 $a_2 - a_1 = 1 - \frac{1}{2}, a_3 - a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, a_4 - a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots, a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$,
上述式子左右两边分别相加, 可得 $a_n - a_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} (n \geq 2)$,
则 $a_n = a_1 + 1 - \frac{1}{n} = 4 - \frac{1}{n} (n \geq 2)$. 又当

$n=1$ 时, $a_1=4-\frac{1}{1}=3$ 依然成立,

所以 $a_n=4-\frac{1}{n}$. 故选 B.

5. C 【解析】已知 $a_n=\frac{n-1}{n}a_{n-1}, n \geq 2$,

$n \in \mathbf{N}$, 则 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$
($n \geq 2$), 当 $n=1$ 时也符合上式, 故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{n}$. 故选 C.

规律方法 由递推公式求通项公式的常用方法

(1) $a_{n+1}-a_n$ 是常数或 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ ($f(n)$ 是可以求和的), 使用累加法或迭代法;

(2) $a_{n+1}=pa_n$ (p 为非零常数) 或 $a_{n+1}=f(n)a_n$ ($f(n)$ 是可以求积的), 使用累乘法或迭代法.

6. D 【解析】 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}a_n=a_n-1$, 易知 $a_n \neq 0$, $\therefore a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$, $\therefore a_2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $a_3=1-2=-1$, $a_4=1-(-1)=2$, $a_5=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

敲黑板: 在无从下手的时候可以多写出几项找一找数列的规律

$\therefore \{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 而 $2\ 025=3 \times 675$, 故 $a_{2\ 025}=a_3=-1$. 故选 D.

7. A 【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=$

$$\begin{cases} 2a_n, 0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}, \\ 2a_n-1, \frac{1}{2} < a_n < 1, \end{cases} \quad a_1 = \frac{3}{5},$$

则 $a_2=2a_1-1=\frac{1}{5}$, $a_3=2a_2=\frac{2}{5}$, $a_4=$

$$2a_3=\frac{4}{5}, a_5=2a_4-1=\frac{3}{5}=a_1,$$

因此继续下去会循环, 数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列,

所以 $a_{10}=a_{2+2 \times 4}=a_2=\frac{1}{5}$. 故选 A.

8. B 【解析】当 $n=2$ 时, $a_2=S_1=a_1=1$, 当 $n=3$ 时, $a_3=S_2=a_1+a_2=1+1=2$, 当 $n=4$ 时, $a_4=S_3=a_1+a_2+a_3=1+1+2=4$, 当 $n=5$ 时, $a_5=S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=1+1+2+4=8$. 故选 B.

9. AC 【解析】数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n-a_n=n^2-n$ ①,

$$S_{n+1}-a_{n+1}=(n+1)^2-(n+1) \text{ ②},$$

$$\text{②}-\text{①} \text{ 得 } a_n=2n,$$

所以 $S_n=a_n+n^2-n=n^2+n$, A, C 正确, B, D 错误. 故选 AC.

规律方法 当条件中同时包含 S_n 和 a_n 时, 可以利用 $S_n-S_{n-1}=a_n$ ($n \geq 2$) 或 $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ 消掉 S_n , 得到仅包含 a_n 的关系式再进一步研究.

10. C 【解析】因为 $S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+$

$$\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n} (n \in \mathbf{N}_+),$$

所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+$

$$\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n-2} (n \in \mathbf{N}_+),$$

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{n}=$

$$\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} (n \geq 2).$$

当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=\frac{1}{2}$, 符合上式, 所

以 $a_n=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} (n \in \mathbf{N}_+)$. 故选 C.

刷易错

★易错点 求数列通项时, 忽略 $n=1$ 的情况致误

11. $a_n=\begin{cases} -2, n=1 \\ 2n-5, n \geq 2 \end{cases}$ 【解析】当 $n \geq 2$

时, $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n+1-(n-1)^2+4(n-1)-1=2n-5$,

当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=1-4+1=-2$, 不满足 $a_n=2n-5$,

$$\text{所以 } a_n=\begin{cases} -2, n=1, \\ 2n-5, n \geq 2. \end{cases}$$

易错警示 只有当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}$ 才存在, 所以根据 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 或

数列 $\{a_n\}$ 的递推公式求通项公式时, 要特别考虑 a_1 , 根据条件中的等式确定 a_1 的值, 若符合由递推公式求得的通项公式 ($n \geq 2$), 则 a_1 可与 a_n ($n \geq 2$) 合并, 若不符合则分段表示.

12. $\begin{cases} 1, n=1, \\ \frac{n^2}{(n-1)^2}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+ \end{cases}$ 【解析】当

$n=1$ 时, $a_1=1$. 由条件知, $a_1a_2a_3 \cdots a_n=n^2$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 所以当 $n \geq 2$ 时,

$$a_1a_2a_3 \cdots a_{n-1}=(n-1)^2, \text{ 两式相除得 } a_n=\frac{n^2}{(n-1)^2} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+).$$

$$\text{所以 } a_n=\begin{cases} 1, n=1, \\ \frac{n^2}{(n-1)^2}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+. \end{cases}$$

易错警示 易错解为 $a_n=\frac{n^2}{(n-1)^2}$, 忽略 $n=1$ 的情形. 注意在对数列的公式进行变形时, 常常会改变 n 的取值, 要善于根据 a_n 的表达形式确定 n 的取值范围, 即树立定义域优先意识.

第 5.1 节综合训练

刷能力

1. A 【解析】设数列 $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4},$

$\frac{1}{4}, \cdots$ 的第 n 项为 a_n ,

$$\text{则 } a_1=1=\frac{1}{(-\sqrt{2})^0}, a_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{(-\sqrt{2})^1},$$

$$\frac{1}{(-\sqrt{2})^1}, a_3=\frac{1}{2}=\frac{1}{(-\sqrt{2})^2},$$

$$a_4=-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{(-\sqrt{2})^3}, a_5=\frac{1}{4}=\frac{1}{(-\sqrt{2})^4},$$

故数列的一个通项公式为 $a_n=\frac{1}{(-\sqrt{2})^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(\sqrt{2})^{n-1}}$. 故选 A.

悟: 当数列中的项正、负交替出现时, 常用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 或 $(-1)^{n-1}$ 来处理

2. D 【解析】由已知可得 $a_2=\frac{12\cos 0}{a_1}=4$,

$$a_3=\frac{12\cos \pi}{a_2}=-3, a_4=\frac{12\cos 2\pi}{a_3}=-4,$$

$$a_5=\frac{12\cos 3\pi}{a_4}=3, a_6=\frac{12\cos 4\pi}{a_5}=4, \cdots,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列, 故 $a_{2\ 026}=a_{506 \times 4+2}=a_2=4$. 故选 D.

3. B 【解析】由 $a_n=a_{n-1}+\log_2 \frac{n+1}{n-1}$ ($n \geq 2$), 得 $a_n-a_{n-1}=\log_2(n+1)-\log_2(n-1)$,

$$\therefore a_2-a_1=\log_2 3-\log_2 1, a_3-a_2=\log_2 4-\log_2 2, a_4-a_3=\log_2 5-\log_2 3, \cdots,$$

$$a_{n-1}-a_{n-2}=\log_2 n-\log_2(n-2), a_n-a_{n-1}=\log_2(n+1)-\log_2(n-1),$$

上述式子左右两边分别相加可得 $a_n-a_1=-\log_2 2+\log_2 n+\log_2(n+1)$,

$$\therefore a_n=\log_2 n+\log_2(n+1)-\log_2 33-1 (n \geq 2),$$

$$\therefore a_{32}=\log_2 32+\log_2 33-\log_2 33-1=5-1=4.$$

故选 B.

4. B 【解析】设正方形数构成的数列为 $\{a_n\}$, 五边形数构成的数列为 $\{b_n\}$, 则 $a_1=1^2, a_2=2^2, a_3=3^2, a_4=4^2$, 由此得出 $a_5=5^2=25$.

$$b_1=1, b_2=5=1+4, b_3=12=1+4+7, b_4=22=1+4+7+10, \text{ 由此得出 } b_5=1+4+7+10+13=35.$$

故选 B.

5. C 【解析】因为 $a_1=1$, 所以 $S_1=1$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $S_n=\frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{S_3}{S_2} \cdot \frac{S_4}{S_3} \cdots$

$$\frac{S_{n-1}}{S_{n-2}} \cdot \frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-2} \times$$

$$\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n, \text{ 当 } n=1$$

时, S_1 满足上式, 所以 $S_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ ($n \in \mathbf{N}_+$).

当 $n \geq 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n-\left[\frac{1}{2}(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]=n$,

当 $n=1$ 时, 满足 $a_n=n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$. 故选 C.

6. ACD 【解析】由 $a_n=\frac{2n-7}{2n-15}=1+\frac{8}{2n-15}$,

悟: 分式的分母和分子中都含有变量, 需要先分离常数, 转化为只有分母中含有变量的式子, 来研究其性质

得当 $n \leq 7, n \in \mathbf{N}_+$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的各项

小于1,且 $\{a_n\}$ 单调递减;

当 $n \geq 8, n \in \mathbf{N}_+$ 时,数列 $\{a_n\}$ 的各项大于1,且 $\{a_n\}$ 单调递减,

所以数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_7 = -7$,最大项为 $a_8 = 9$,所以 **A 正确**.

当 $n \in \{1, 2, 3\}$ 时,满足 $0 < a_n < 1$;当 $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ 时,满足 $a_n < 0$;当 $n \geq 8, n \in \mathbf{N}_+$ 时, $a_n > 1$,所以满足 $a_n a_{n+1} a_{n+2} < 0$ 时, $n = 2, 4, 5, 7$,共有4个值,所以 **B 错误**.

由B的分析可知使得 S_n 取得最小值的 n 为7,所以 **C 正确**.

因为 T_n 为前 n 项积,所以只有 T_4 和 T_6 为负数,又 $a_5 = -\frac{3}{5}, a_6 = -\frac{5}{3}$,故

$T_4 = T_6$,所以 T_n 存在最小值,为 T_4 或 T_6 ,从第8项开始, T_n 为正数且 $a_n > 1$,可知 T_n 随着 n 的增大而增大,所以 T_n 无最大值,所以 **D 正确**. 故选 ACD.

规律方法 研究数列前 n 项和 S_n 的最值,可以通过研究项的正负从而得到 S_n 的单调性继而得到 S_n 的最值.

7. ABC 【解析】对于A,由 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbf{N})$,

可得 $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$,则 $\frac{a_6}{a_3} = 4$,故 **A 正确**;

对于B, $a_{n-2} + a_{n+2} = a_{n-2} + a_{n+1} + a_n = a_{n-2} +$

$a_{n-1} + a_n + a_n = 3a_n$,故 **B 正确**;

对于C, $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2023} = a_2 + (a_4 - a_2) + (a_6 - a_4) + \cdots + (a_{2024} - a_{2022}) = a_{2024}$,故 **C 正确**;

对于D, $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2024} = (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + (a_7 - a_5) + \cdots + (a_{2025} - a_{2023}) = a_{2025} - 1$,故 **D 错误**. 故选 ABC.

多种解法 对于C,D, $a_{2024} = a_{2023} + a_{2022} = a_{2023} + a_{2021} + a_{2020} = a_{2023} + a_{2021} + a_{2019} + a_{2018} = \cdots = a_{2023} + a_{2021} + \cdots + a_1$,
 $a_{2025} = a_{2024} + a_{2023} = a_{2024} + a_{2022} + a_{2021} = a_{2024} + a_{2022} + a_{2020} + a_{2019} = \cdots = a_{2024} + a_{2022} + \cdots + a_2 + a_1$,故C正确,D错误.

名师点拨 研究陌生的递推数列的多阶递推性质,要充分利用其本身的递推公式,通过变形、迭代等方法进行代数变形从而得到结论.

8. 3 【解析】已知 $n \geq 1$ 时,正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+2} \cdot a_{n+1} \cdot a_n = 10$,把 n 替换为 $n+1$,可得 $a_{n+3} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+1} = 10$,

$\therefore \frac{a_{n+2} \cdot a_{n+1} \cdot a_n}{a_{n+3} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+3}} = 1$,即 $a_{n+3} = a_n$,故数列 $\{a_n\}$ 是周期为3的周期数列.

已知 $a_2 = 5$,令 $n = 1$,得 $a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 = 10$,则 $a_3 \cdot a_1 = 2$, $\therefore a_1 = 1, a_3 = 2$ 或

$a_1 = 2, a_3 = 1$.

令 $n = 2$,得 $a_4 \cdot a_3 \cdot a_2 = 10$,则 $5a_3 \cdot a_4 = 10$,故 $a_3 \cdot a_4 = 2$,

结合周期可知 $a_4 = a_1$,若 $a_1 = 1, a_3 = 2$,则 $a_4 = a_1 = 1$,满足 $2 \times 1 = 2$;

若 $a_1 = 2, a_3 = 1$,则 $a_4 = a_1 = 2$,满足 $1 \times 2 = 2$,

$\therefore a_1, a_2, a_3$ 为1,5,2或2,5,1,又 $\{a_n\}$ 的周期为3,且 $2026 \div 3 = 675 \cdots 1$,

$2028 \div 3 = 676$, $\therefore a_{2026} = a_1, a_{2028} = a_3$,

$\therefore a_{2026} + a_{2028} = a_1 + a_3 = 1 + 2 = 3$.

素养

9. A 【解析】当 $n = 2$ 时, $a_2 + \frac{2}{a_2} = S_2 = a_1 + a_2$,得 $a_2 = 2$.当 $n \geq 3$ 时, $S_{n-1} = a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}$,所以 $S_n - S_{n-1} = a_n + \frac{2}{a_n} - a_{n-1} - \frac{2}{a_{n-1}} = a_n$,所以 $\frac{2}{a_n} = a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} (n \geq 3)$,又因为数列 $\{a_n\}$ 是正实数列,即 $a_n > 0$,所以 $\frac{2}{a_n} = a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \geq 2\sqrt{2}$,当且仅当 $a_{n-1} = \sqrt{2} (n \geq 3)$ 时等号成立,所以 $0 < a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (n \geq 3)$,所以 a_{2026} 的整数部分是0. 故选 A.

5.2 等差数列

5.2.1 等差数列

刷基础

1. CD 【解析】对于A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 2 \times \frac{1}{3}$,故 **A 不是等差数列**;对于B,

$\lg 5 + \lg 7 = \lg 35 \neq \lg 36 = 2\lg 6$,故 **B 不是等差数列**;对于C, $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 2 \times \frac{7}{8}$,故 **C 是等差数列**;对于D, $3 + 3 = 2 \times$

3 ,故 **D 是等差数列**. 故选 CD.

2. C 【解析】因为 $(a_{n+1} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+2}) = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+3} - a_{n+2}) = d + d = 2d$,所以数列 $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \cdots$ 是公差为 $2d$ 的等差数列. 故选 C.

3. ACD 【解析】 $a_n = kn + b (k, b$ 为常数, $n \in \mathbf{N}_+)$,则 $a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - kn - b = k$,符合等差数列的定义,所以 $\{a_n\}$ 是等差数列,故 **A 正确**;

$a_{n+2} - a_n = d (d$ 为常数, $n \in \mathbf{N}_+)$ 不符合从第二项起,每一项与它的前一项的差都为同一个常数,故 **B 错误**;

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 (n \in \mathbf{N}_+)$,即 $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$,符合等差中项的性质,所以 $\{a_n\}$ 是等差数列,故 **C 正确**;

$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n (n \in \mathbf{N}_+)$,则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$,且 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$ 符合上式,则 $a_n = 2n$ 符合一次函数的形式,所以 $\{a_n\}$ 为等差数列,故 **D 正确**. 故选 ACD.

归纳总结 判断一个数列是否为等差数列的常用方法

(1) 定义法

$a_{n+1} - a_n = d (d$ 为常数, $n \in \mathbf{N}_+)$ 或 $a_n - a_{n-1} = d (d$ 为常数, $n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$ $\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(2) 等差中项法

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (n \in \mathbf{N}_+)$ $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 为等差数列.

(3) 通项公式法

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式形如 $a_n = pn + q (p, q$ 为常数, $n \in \mathbf{N}_+)$ $\Leftrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

4. 【解】(1) 数列 $\{c_n\}$ 是等差数列.

证明如下:

由数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列,公差分别为 d_1, d_2 ,且 $c_n = a_n + 3b_n$,

可得 $a_{n+1} - a_n = d_1, b_{n+1} - b_n = d_2$,

则 $c_{n+1} - c_n = (a_{n+1} + 3b_{n+1}) - (a_n + 3b_n) = (a_{n+1} - a_n) + 3(b_{n+1} - b_n) = d_1 + 3d_2$ (常数),所以数列 $\{c_n\}$ 是公差为 $d_1 + 3d_2$ 的等差数列.

(2) 因为 $a_1 = 1, b_1 = 2, d_1 = 2, d_2 = 4$,所以 $c_1 = a_1 + 3b_1 = 7, d_1 + 3d_2 = 14$,

由(1)得,数列 $\{c_n\}$ 是首项为7,公差为14的等差数列,

所以 $c_n = 7 + 14(n-1) = 14n - 7$.

5. D 【解析】由已知可得等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1 = 3$,公差 $d = 11 - 3 = 8$,所以通项公式 $a_n = 3 + 8(n-1) = 8n - 5$.由 $a_n = 67$ 可得 $8n - 5 = 67$,解得 $n = 9$. 故选 D.

链接教材 本题是教材第18页例2的同类试题. 首先根据所给数据或关系写出数列的通项公式,要判断数列中是否存在某项,只需将此数代入数列的通项公式中,求出 n 的值. 若求出的 n 为正整数,则该数是数列中的项,求出的 n 即为该数是数列的第几项的项数,否则该数不是数列中的项.

6. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,因为 $a_1 + a_2 = 3, a_5 + a_6 = 11$,所以 $a_5 + a_6 = a_1 + a_2 + 8d = 3 + 8d = 11$,解得 $d = 1$. 故选 A.

7. D 【解析】因为数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 是公差为2的等差数列,所以 $(a_{n+2} + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_n) = 2$,即 $a_{n+2} - a_n = 2$,则 $\{a_n\}$ 的奇数项构成公差为2的等差数列,通项公式为 $a_{2k-1} = 2 + 2(k-1) = 2k, k \in \mathbf{N}_+$.令 $2k - 1 = 15$,则 $k = 8$,所以 $a_{15} = 16$. 故选 D.

8. B 【解析】 $a = 3\sqrt{3} + \sqrt{2}, b = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$,则 a, b 的等差中项为 $\frac{a+b}{2} = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}$, 故选 B.

9. B 【解析】如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,那么根据等差中项的定义一定有 $a_3 + a_9 = 2a_6$,即必要性成立;反之 $a_3 + a_9 = 2a_6$ 成立,不一定有数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,即充分性不成立. 故选 B.

10. 16 【解析】由等差中项的定义可得

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1, \text{ 故 } a + 9b = (a + 9b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} + 9 \geq 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16 \left(\text{当且仅当 } a=4, b=\frac{4}{3} \text{ 时取等号} \right).$$

11. C 【解析】因为 $a_2 + a_6 = 8$, 所以根据等差数列的性质可得 $a_2 + a_6 = 2a_4 = 8$, 因此 $a_4 = 4$, 同理可得 $a_1 + a_7 = 2a_4$, 所以 $a_1 + a_2 + a_7 = 3a_4 = 3 \times 4 = 12$. 故选 C.

12. C 【解析】因为 a_1, a_{2024} 为方程 $x^2 - 7x + 6 = 0$ 的两根, 所以 $a_1 + a_{2024} = 7$. 又数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_2 + a_{2023} = a_1 + a_{2024} = 7$. 故选 C.

13. C 【解析】因为 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, 所以根据等差数列的性质, 可得数列 $\{a_n + b_n\}$ 也为等差数列, 设其公差为 d . 由题意可知, $a_3 + b_3 = (a_1 + b_1) + 2d$, 即 $9 = 3 + 2d$, 解得 $d = 3$. 因此 $a_6 + b_6 = (a_1 + b_1) + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18$. 故选 C.

14. A

思路导引 由已知可得 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是等差数列, 从而先利用等差数列的通项公式求出 $\sqrt{a_n}$, 进而可求出 a_n .

【解析】因为 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{2}$, 所以 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 公差为 $\sqrt{2}$ 的等差数列, 所以 $\sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}(n+1)$, 所以 $a_n = 2(n+1)^2$. 故选 A.

15. $a_n = \frac{1}{4n-2}$ 【解析】由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n+1}$, 且

$$a_1 = \frac{1}{2}, \text{ 可知 } a_n \neq 0,$$

$$\text{可得 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{4a_n+1}{a_n} = 4 + \frac{1}{a_n}, \text{ 即 } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 4,$$

则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} = 2$, 公差为 4 的等差数列,

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} = 2 + 4(n-1) = 4n-2, \text{ 所以}$$

$$a_n = \frac{1}{4n-2}.$$

16. 【解】(1) 因为 $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1) \cdot a_n = 3n(n+1)$, 所以 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n} a_n + 3(n+1)$, 则 $a_2 = 2a_1 + 3 \times 2 = 8, a_3 = \frac{3}{2}a_2 + 3 \times 3 = 21$.

(2) 已知 $a_1 = 1, na_{n+1} = (n+1)a_n = 3n(n+1)$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 3$,

所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 3

的等差数列, 则 $\frac{a_n}{n} = 3n-2$,

$$\text{所以 } a_n = n(3n-2) = 3n^2 - 2n.$$

17. B 【解析】设相邻两个节气昼长减少或增加的量为 $d(d>0)$, 则立冬到冬至昼长增加 $3d$, 冬至到雨水昼长减少 $4d$, 设冬至的昼长为 x 尺, 则 $\begin{cases} x-4d=9.5, \\ 10.5+3d=x, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d=1, \\ x=13.5, \end{cases}$ 则冬至所对的昼长为 13.5 尺. 故选 B.

18. C 【解析】被 3 除余 1 且被 4 除余 2 的正整数按照从小到大的顺序排成一列, 构成首项为 10, 公差为 $3 \times 4 = 12$ 的等差数列, 所以 $a_n = 10 + 12 \times (n-1) = 12n-2$, 则 $a_{2025} = 12 \times 2025 - 2 = 24298$. 故选 C.

规律方法 求两个等差数列的公共项的方法

若等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 , 则数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公共项仍然构成一个等差数列, 其公差为 d_1, d_2 的最小公倍数, 首项为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 中第一个公共项.

19. C 【解析】 $\triangle ABC$ 的三个内角为 A, B, C , 且 $A+B+C = 180^\circ$.

①若 q 成立, 即 A, B, C 成等差数列, 则 $2B = A+C$, 结合 $A+B+C = 180^\circ$, 得 $3B = 180^\circ, B = 60^\circ$, 故 p 成立, 即 $q \Rightarrow p$.

②若 p 成立, 不妨设 $B = 60^\circ$, 则 $A+C = 120^\circ = 2B$, 所以 A, B, C 成等差数列, 即 q 成立, 故 $p \Rightarrow q$.

所以 $p \Leftrightarrow q$, 即 p 是 q 的充要条件. 故选 C.

20. B 【解析】由 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{n} \overrightarrow{OA} + (2 - \frac{1}{n}) \overrightarrow{OB}$, 及 P, A, B 三点共线, 可得 $\frac{1}{n} + 2 - \frac{1}{n} = 1$, 即 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = -1$. 所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -1 的等差数列, 且是递减数列. 故选 B.

刷提升

1. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $a_6 = a_3 + 9$, 所以 $a_1 + 5d = a_1 + 2d + 9$, 即 $5d = 2d + 9$, 解得 $d = 3$. 因为 $2a_2 = a_5 - 1$, 所以 $2(a_1 + 3) = a_1 + 12 - 1$, 解得 $a_1 = 5$. 则 $a_n = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$. 故选 A.

2. C 【解析】由题意得数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 则 $a_n = a_8 + (n-8) \times 1 = n-18$. 由 $a_m = m-18 = 0$, 得 $m = 18$. 故选 C.

多种解法 由题意知, 数列 $\{a_n\}$ 是

公差为 1 的等差数列, 则 $\frac{a_m - a_8}{m-8} = 1$, 代入解得 $m = 18$. 故选 C.

3. ACD 【解析】设 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 对于选项 A, $a_{n+1} + 3 - (a_n + 3) = a_{n+1} - a_n = d$, 可知数列 $\{a_n + 3\}$ 是以 $a_1 + 3$ 为首项, d 为公差的等差数列, 所以 A 正确;

对于选项 B, $(a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) = d(a_{n+1} + a_n)$, 相邻两项之和不一定是同一个常数, 所以 B 错误;

对于选项 C, $(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = d - d = 0$, 则数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = d$ 为首项, 0 为公差的常数数列, 所以

C 正确;

对于选项 D, $2a_{n+1} - 2a_n = 2d$, 则数列 $\{2a_n\}$ 是以 $2a_1$ 为首项, $2d$ 为公差的等差数列, 所以 D 正确. 故选 ACD.

4. C 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则由 $a_3 + a_8 + a_{13} = 12$, 得 $a_8 = a_1 + 7d = 4$, $\therefore a_1 = 4 - 7d$.

代入 $a_3 a_8 a_{13} = 28$, 整理得 $(4-5d) \times 4 \times (4+5d) = 28$, 解得 $d = \pm \frac{3}{5}$.

$$\text{当 } d = \frac{3}{5} \text{ 时, } a_1 = -\frac{1}{5}, a_n = -\frac{3}{5}n + \frac{4}{5};$$

$$\text{当 } d = -\frac{3}{5} \text{ 时, } a_1 = \frac{41}{5}, a_n = -\frac{3}{5}n + \frac{44}{5}.$$

多种解法 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\therefore a_3 + a_8 + a_{13} = 3a_8 = 12, \therefore a_8 = 4,$$

$$\therefore \begin{cases} a_3 + a_{13} = 8, \\ a_3 a_{13} = 7, \end{cases}$$

$\therefore a_3, a_{13}$ 是方程 $x^2 - 8x + 7 = 0$ 的两根,

敲黑板: 由和与积, 联想到根与系数的关系

$$\therefore \begin{cases} a_3 = 1, \\ a_{13} = 7 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a_3 = 7, \\ a_{13} = 1. \end{cases}$$

$$\text{由 } a_3 = 1, a_{13} = 7, \text{ 得 } d = \frac{a_{13} - a_3}{13 - 3} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore a_n = a_3 + (n-3)d = \frac{3}{5}n - \frac{4}{5};$$

$$\text{同理, 由 } a_3 = 7, a_{13} = 1, \text{ 得 } a_n = -\frac{3}{5}n + \frac{44}{5}. \text{ 故选 C.}$$

5. A 【解析】由 $\sqrt{n+1}a_n - \sqrt{n}a_{n+1} = a_n a_{n+1} \Rightarrow \frac{\sqrt{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{a_n} = 1$,

所以数列 $\left\{\frac{\sqrt{n}}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{\sqrt{1}}{a_1} = \frac{1}{1} = 1$ 为首项, 1 为公差的等差数列,

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{9}}{a_9} = 1 + (9-1) \times 1 = 9 \Rightarrow a_9 = \frac{1}{3}.$$

故选 A.

6. C 【解析】设这四个数构成的等差数列的项依次为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$, 由题意得

$$\begin{cases} (a-3d)^2 + (a-d)^2 + (a+d)^2 + (a+3d)^2 = 94, \\ (a-d)(a+d) = (a-3d)(a+3d) + 18, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2a^2 + 10d^2 = 47, \\ 4d^2 = 9, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{7}{2}, \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = \frac{7}{2}, \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{2}, \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = \frac{7}{2}, \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{7}{2}, \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{7}{2}, \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

当 $a = \frac{7}{2}, d = \frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $-1, 2,$

$5, 8$; 当 $a = \frac{7}{2}, d = -\frac{3}{2}$ 时, 等差数列为

$8, 5, 2, -1$, 以上两种情况等差数列的和都为 14.

当 $a = -\frac{7}{2}, d = \frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $-8,$

$-5, -2, 1$; 当 $a = -\frac{7}{2}, d = -\frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $1, -2, -5, -8$, 以上两种情况等差数列的和都为 -14 . 故选 C.

7. BC 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

对于 A, $\because a_1 + a_2 = 2a_1 + d > 0, a_2 + a_3 = 2a_1 + d + 2d, \therefore 2a_1 + 3d$ 的正负不确定, 故 A 错误.

对于 B, 由 $a_1 a_2 < 0$, 得 a_1, a_2 异号, 当 $a_1 < 0, a_2 > 0$ 时, 由 $d = a_2 - a_1 > 0$ 可知 $a_3 > 0$, 则 $a_2 a_3 > 0$;

当 $a_1 > 0, a_2 < 0$ 时, 由 $d = a_2 - a_1 < 0$ 可知 $a_3 < 0$, 则 $a_2 a_3 > 0$, 故 B 正确.

对于 C, $\because a_1 + a_3 = 2a_2, \therefore 2a_2 = a_1 + a_3 \geq 2\sqrt{a_1 a_3}, \therefore a_2 \geq \sqrt{a_1 a_3}$,

又 $\because a_2 > a_1$, 故不存在 $a_1 = a_3$ 使等号成立, $\therefore a_2 > \sqrt{a_1 a_3}$, 故 C 正确.

对于 D, $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) = -d^2 \leq 0$, 故 D 错误. 故选 BC.

8. C 【解析】因为 $(3n-2)a_{n+1} = (3n+1)a_n - 18n^2 + 6n + 4 = (3n+1)a_n - 2(3n-2)(3n+1)$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{3n+1} = \frac{a_n}{3n-2} - 2$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{3n+1} - \frac{a_n}{3n-2} = -2$. 又 $a_1 = 20$, 所以 $\frac{a_1}{3 \times 1 - 2} = 20$,

所以 $\{\frac{a_n}{3n-2}\}$ 是以 20 为首项, -2 为公差的等差数列,

所以 $\frac{a_n}{3n-2} = 20 + (n-1) \times (-2) = -2n + 22$,

所以 $a_n = (-2n + 22)(3n-2) = -2(3n^2 - 35n + 22) = -6(\frac{35}{6}n - \frac{961}{6})$.

又 $n \in \mathbf{N}_+$, 所以当 $n=6$ 时, a_n 取得最大值, 所以 m 的取值为 6. 故选 C.

9. D 【解析】因为 $a_n + 2T_n = 1$, 所以 $a_1 + 2T_1 = 1$, 即 $a_1 + 2a_1 = 1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{3}$.

又 $\frac{T_n}{T_{n-1}} + 2T_n = 1 (n \geq 2)$, 显然 $T_n \neq 0$,

所以 $\frac{1}{T_{n-1}} + 2 = \frac{1}{T_n} (n \geq 2)$, 所以 $\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} = 2 (n \geq 2)$,

所以数列 $\{\frac{1}{T_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{a_1} = 3$, 公差为 2 的等差数列,

所以 $\frac{1}{T_n} = 3 + 2(n-1) = 2n+1$, 即 $T_n = \frac{1}{2n+1}$.

所以 $a_{2 \ 025} = 1 - 2T_{2 \ 025} = 1 - 2 \times \frac{1}{4 \ 051} = \frac{4 \ 049}{4 \ 051}$, 故选 D.

10. ACD 【解析】因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c > 2^a$, 所以 $a < b+1$, C 正确;

因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c$, 所以 $2^2 \times 2^{b+1} = 2^2 \times 2^a + 2^2 \times 2^c$, 即 $2 \times 2^{b+2} = 2^{a+2} + 2^{c+2}$, A 正确;

设 $2^a = m, 2^b = n, 2^c = q$ 成等差数列, 得出 $2n = m+q$,

若 $2^a = m^2, 2^b = n^2, 2^c = q^2$ 成等差数列, 则 $2n^2 = m^2 + q^2 = \frac{(m+q)^2}{2} \Rightarrow m^2 + q^2 - 2mq = 0 \Rightarrow (m-q)^2 = 0 \Rightarrow m = q$,

已知 $a > b > c$, 所以 $m > n > q$, 矛盾, B 错误. 故选 ACD.

正确;

因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c > 2^a$, 所以 $a < b+1$, C 正确;

因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c$, 所以 $2^2 \times 2^{b+1} = 2^2 \times 2^a + 2^2 \times 2^c$, 即 $2 \times 2^{b+2} = 2^{a+2} + 2^{c+2}$, A 正确;

设 $2^a = m, 2^b = n, 2^c = q$ 成等差数列, 得出 $2n = m+q$,

若 $2^a = m^2, 2^b = n^2, 2^c = q^2$ 成等差数列, 则 $2n^2 = m^2 + q^2 = \frac{(m+q)^2}{2} \Rightarrow m^2 + q^2 - 2mq = 0 \Rightarrow (m-q)^2 = 0 \Rightarrow m = q$,

已知 $a > b > c$, 所以 $m > n > q$, 矛盾, B 错误. 故选 ACD.

11. D 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列,

所以 $a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1$,

所以 $b_n = (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n} - \frac{(-1)^n}{a_{n+1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} - \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

记 $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{a_n}$, 则 $b_n = c_n - c_{n+1}$,

故 $T_n = (c_1 - c_2) + (c_2 - c_3) + (c_3 - c_4) + \dots + (c_n - c_{n+1}) = c_1 - c_{n+1}$, 即 $T_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{2n+3}$.

当 n 为偶数时, $T_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{3}$;

当 n 为奇数时, $T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n+3} \leq \frac{8}{15}$.

☞ 点悟: 数列中的项正负交替, 需要讨论 n 的奇偶性.

因为不等式 $T_n < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda) (n \in \mathbf{N}_+)$ 恒成立, 即 $(T_n)_{\max} < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda)$ ($n \in \mathbf{N}_+$),

所以 $\frac{8}{15} < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda)$,

整理得 $25\lambda^2 - 15\lambda + 2 = (5\lambda-1)(5\lambda-2) < 0$,

解得 $\frac{1}{5} < \lambda < \frac{2}{5}$, 所以实数 λ 的取值范围为 $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$. 故选 D.

12. $-n$ (答案不唯一) 【解析】假设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d ,

由条件②可得 $a_1 + (m+n-1)d = a_1 + (m-1)d + a_1 + (n-1)d$, 所以 $a_1 = d$; 再根据条件① $\{a_n\}$ 是递减数列, 可知 $d < 0$, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = nd$, 且 $d < 0$.

取 $d = -1$, 此时 $a_n = -n$, 满足题意.

二级结论 $\{a_n\}$ 是等差数列的一个充分条件为 $a_{m+n} = a_m + a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbf{N}_+$ 成立, 或 $a_{m-n} = a_m - a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbf{N}_+$ 且 $m > n$ 成立.

下面证: $\{a_n\}$ 是等差数列的一个充分条件为 $a_{m+n} = a_m + a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbf{N}_+$ 成立.

证明: 取 $m = 1$, 有 $a_{n+1} = a_n + a_1$, 即 $a_{n+1} - a_n = a_1$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项为 a_1 , 公差为 a_1 , 通项公式为 $a_n = na_1$, 此时 $a_{m+n} = (m+n)a_1 = ma_1 + na_1 = a_m + a_n$ 满足条件.

13. $\frac{3}{1 \ 015}$ 【解析】数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+2}}$, 得 $\frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_{n+1}}$, 则数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} = 1$ 的等差数列, 设其公差为 d , 则 $\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1)d$, 即 $a_n = \frac{1}{dn+1-d}$.

于是 $a_n a_{n+1} = \frac{1}{dn+1-d} \cdot \frac{1}{dn+1} = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{dn+1-d} - \frac{1}{dn+1} \right)$, $\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = \frac{1}{d} \cdot \left(1 - \frac{1}{dn+1} \right) = \frac{n}{dn+1}$.

由 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_6 a_7 = 3$, 得 $\frac{6}{6d+1} = 3$, 解得 $d = \frac{1}{6}$, 因此 $a_n = \frac{6}{n+5}$.

所以 $a_{2 \ 025} = \frac{6}{2 \ 025+5} = \frac{3}{1 \ 015}$.

14. 【解】(1) 因为 $\tan a_{n+1} = \frac{1}{\cos a_n}$, 所以 $\tan^2 a_{n+1} = \frac{1}{\cos^2 a_n} = \frac{\sin^2 a_n + \cos^2 a_n}{\cos^2 a_n} = 1 + \frac{\sin^2 a_n}{\cos^2 a_n}$, 所以 $\tan^2 a_{n+1} - \tan^2 a_n = 1$, 所以数列 $\{\tan^2 a_n\}$ 是以 $\tan^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}$ 为首项, 1 为公差的等差数列.

所以 $\tan^2 a_n = \frac{1}{3} + (n-1) = \frac{3n-2}{3}$.

(2) 由 $\begin{cases} \tan^2 a_n = \frac{\sin^2 a_n}{\cos^2 a_n} = \frac{3n-2}{3} \\ \sin^2 a_n + \cos^2 a_n = 1 \end{cases}$, 解得 $\sin^2 a_n = \frac{3n-2}{3n+1}$, 又 $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $\sin a_n > 0$, 所以 $\sin a_n = \sqrt{\frac{3n-2}{3n+1}} = \sqrt{\frac{3(n-1)+1}{3n+1}}$, 所以 $\sin a_1 \cdot \sin a_2 \cdot \dots \cdot \sin a_m = \sqrt{\frac{1}{4} \times \frac{4}{7} \times \frac{7}{10} \times \dots \times \frac{3(m-2)+1}{3(m-1)+1} \times \frac{3(m-1)+1}{3m+1}} = \sqrt{\frac{1}{3m+1}}$, 所以 $\sqrt{\frac{1}{3m+1}} = \frac{1}{10}$, 即 $3m+1 = 100$, 解得 $m = 33$.

15. 【解】(1) 当 $t = 1$ 时, $a_n a_{n+1} = (a_n - a_{n+1}) a_{n+2}$, 当 $n = 1$ 时, $a_3 = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$;

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } a_4 = \frac{a_2 a_3}{a_2 - a_3} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} = -1;$$

$$\text{同理可得 } a_5 = \frac{a_3 a_4}{a_3 - a_4} = \frac{\frac{1}{2} \times (-1)}{\frac{1}{2} - (-1)} = -\frac{1}{3},$$

$$a_6 = \frac{a_4 a_5}{a_4 - a_5} = \frac{(-1) \times (-\frac{1}{3})}{-1 - (-\frac{1}{3})} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{由 } a_n a_{n+1} = (a_n - a_{n+1}) a_{n+2},$$

$$\text{可得 } \frac{1}{a_{n+2}} = \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+3}} = \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = -\frac{1}{a_n},$$

$$\text{即 } a_{n+3} = -a_n,$$

所以 $a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 6 的周期数列,

$$\text{且 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 0,$$

$$\text{所以 } \{a_n\} \text{ 的前 } 50 \text{ 项和为 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 8(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + a_1 + a_2 = \frac{4}{3}.$$

$$(2) \text{ 由题意 } a_n \neq 0, \text{ 故 } a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{ta_n - a_{n+1}},$$

$$\text{因为 } a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}, a_2 > a_3,$$

$$\text{所以 } a_3 = \frac{1}{3t-1} < \frac{1}{3}, \text{ 即 } t > \frac{4}{3}, \text{ 故正整数 } t \text{ 满足 } t \geq 2.$$

$$\text{当 } t \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{a_{n+2}} = \frac{ta_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{t}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n},$$

$$\frac{1}{a_n} \geq \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}, \text{ 所以 } \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n},$$

$$\text{从而 } \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \geq \cdots \geq \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{1}{a_1} = 2,$$

$$\text{即 } \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}} > 0, \text{ 可得 } a_{n+2} < a_{n+1}, \text{ 又 } a_2 < a_1,$$

所以 $a_n > a_{n+1}$, 故正整数 t 的最小值为 2.

多种解法 (2) 由 (1) 知, 当 $t = 1$

时, $a_4 = -1, a_5 = -\frac{1}{3}$, 不满足 $a_4 > a_5$,

故 $t = 1$ 不符合题意;

当 $t = 2$ 时, 因为 $a_n \neq 0$, 所以在 $a_n a_{n+1} = (2a_n - a_{n+1}) a_{n+2}$ 两边同除以 $a_n a_{n+1} a_{n+2}$ 得,

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{2}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}, \text{ 即 } \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}, \text{ 所以}$$

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列.

因为 $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{3}$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的公

差为 2, 首项为 1, 所以 $\frac{1}{a_n} = 2n - 1$, 即

$$a_n = \frac{1}{2n-1},$$

所以 $a_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} = a_{n+1}$, 故正整数 t 的最小值为 2.

刷易错

★易错点 1 误认通项公式致错

16. D 【解析】在 $3n+11$ 中, 令 $n=1$ 得 14, 它是这个数列的第 4 项, 前面还有 5, 8, 11 三项, 故这个数列的项数为 $n+3$. 故选 D.

易错警示 本题易误认为 $3n+11$ 为数列的通项公式, 其实它为数列的最后一项, 而不是第 n 项.

★易错点 2 忽略隐含条件致错

17. D 【解析】因为等差数列的首项为 $a_1 = -12$, 公差为 d , 且从第 10 项开始为正数,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_9 \leq 0, \\ a_{10} > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -12+8d \leq 0, \\ -12+9d > 0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\frac{4}{3} < d \leq \frac{3}{2}, \text{ 故选 D.}$$

易错警示 解答本题易出现的错误是忽略隐含条件 a_9 的取值范围, 导致公差 d 的取值范围变大.

5.2.2 等差数列的前 n 项和

课时 1 等差数列的前 n 项和(1)

刷基础

1. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意得, $5a_5 + S_2 = 5a_1 + 20d + 2a_1 + d = 7a_1 + 21d = 12$, 则 $S_7 = 7a_1 + \frac{7 \times 6}{2}d = 7a_1 + 21d = 12$. 故选 C.

2. A 【解析】由题可知 $\begin{cases} S_5 \geq S_4, \\ S_4 \geq S_6, \end{cases}$ 则

$$\begin{cases} 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d \geq 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d, \\ 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d \geq 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 4 \geq -4d, \\ -8 \geq 9d, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$d \in \left[-1, -\frac{8}{9}\right]. \text{ 故选 A.}$$

3. BC 【解析】对 A, B: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则有 $\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = -1, \\ S_4 = 4a_1 + 6d = -8, \end{cases}$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = -5, \\ d = 2, \end{cases} \text{ 则 } a_n = a_1 + (n-1)d = -5 + 2(n-1) = 2n-7, \text{ 故 A 错误, B 正确;}$$

$$\text{对 C: } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(-5 + 2n-7)n}{2} = n^2 - 6n, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对 D: } \frac{S_n}{n} - \frac{a_2}{2} = \frac{n^2 - 6n}{n} - \frac{2 \times 2 - 7}{2} = n - 6 + \frac{3}{2} = n - \frac{9}{2},$$

$$\text{当且仅当 } n \geq 5 \text{ 时, } \frac{S_n}{n} \geq \frac{a_2}{2}, \text{ 故 D 错}$$

误. 故选 BC.

4. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_6 = a_2 + 4d$, 所以 $10 = 22 + 4d$, 得 $d = -3$, 所以 $a_1 = a_2 - d = 25$, 所以 $a_n = 28 - 3n$.

(2) 因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ 也是等差数列, 公差为 $2d$, 所以 $a_2, a_4, \dots, a_{20}$ 是首项为 $a_2 = 22$, 公差为 -6 的等差数列, 共有 10 项, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{20} = 10 \times 22 + \frac{9 \times 10}{2} \times (-6) = -50$.

5. B 【解析】由等差数列 $\{a_n\}$ 得 $a_2 + a_5 + a_8 = 3a_5$, 故 $3(a_5 + a_6) = 18$, 即 $a_5 + a_6 = 6$.

$$\text{所以 } S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = 5(a_5 + a_6) = 30. \text{ 故选 B.}$$

6. C 【解析】等差数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $S_5 - S_3 = 6$ 得 $a_4 + a_5 = 6$, 所以 $S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(a_4 + a_5) = 4 \times 6 = 24$. 故

选 C.

7. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $2a_4 - a_5 = 5$, 可得 $2(a_1 + 3d) - (a_1 + 4d) = 5$, 可得 $a_1 + 2d = 5$, 即 $a_3 = 5$,

$$\text{则 } S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3 = 25. \text{ 故选 D.}$$

8. ABD 【解析】对于 A, $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_3 + a_7)}{2} = 18$, 故 A 正确;

对于 B, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $(a_3 + a_4) - (a_1 + a_2) = 4d = 4$, 得 $d = 1$,

则 $a_7 + a_8 = (a_1 + a_2) + 12d = 5 + 12 = 17$, 故 B 正确;

$$\text{对于 C, } S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = 15a_8 > 0, \text{ 则}$$

$$a_8 > 0, S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = 8(a_8 + a_9) < 0,$$

$$\text{则 } a_8 + a_9 < 0, \text{ 即 } 0 < a_8 < -a_9, \text{ 所以 } a_8^2 < a_9^2,$$

故 C 错误;

对于 D, 若 $S_9 = S_{10}$, 则 $a_{10} = 0, S_{18} = \frac{18(a_1 + a_{18})}{2} = 9(a_9 + a_{10}) = 9a_9$,

因为 $a_1 > 0, a_{10} = 0$, 所以公差 $d = \frac{a_{10} - a_1}{9} < 0$, 则 $a_9 = a_{10} - d > 0$,

所以 $S_{18} > 0$, 故 D 正确. 故选 ABD.

9. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_{2007} = S_{2026}$, 则当 $a_1 \neq 0, d = 0$ 时,

$S_n = na_1$, 不满足 $S_{2007} = S_{2026}$, 不满足题意;

当 $a_1 = 0, d \neq 0$ 时, $S_n = \frac{n(n-1)}{2}d$, 不满足 $S_{2007} = S_{2026}$, 不满足题意;

当 $a_1 \neq 0, d \neq 0$ 时, S_n 是关于 n 的二次函数, 由二次函数图象的对称性,

$$\text{可得 } \frac{2007+2026}{2} = \frac{k+2021}{2}, \text{ 解得 } k =$$

$$2012. \text{ 综上, } k = 2012. \text{ 故选 A.}$$

10. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则其前 n 项和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$.

当 $d=0$ 时, $S_n = na_1$, 则 (n, S_n) 是过原点的直线上的点, 所以 **B 正确**; 当 $d \neq 0$ 时, (n, S_n) 是过原点的抛物线上的点, 所以 **A, D 正确**. 故选 C.

11. 2 【解析】因为 $S_n = (n+2)(n-1) + p$, 所以 $S_n = n^2 + n - 2 + p$, 若 $S_n = (n+2)(n-1) + p$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 S_n 的常数项为 0, 即 $-2+p=0$, 解得 $p=2$.

12. B 【解析】因为 $a_n = 2n-11$, 则 $a_1 = 2 \times 1 - 11 = -9$, 且数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

则 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(-9+2n-11)}{2} = n^2 - 10n = (n-5)^2 - 25$, 所以当 $n=5$ 时, S_n 取得最小值, 即 S_5 最小, 故选 B.

链接教材 本题是教材第 25 页例 3 的变式, 主要考查利用二次函数的性质求等差数列前 n 项和的最值. 等差数列的前 n 项和 S_n 可以写成 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数) 的形式, 利用配方法或二次函数的图象、单调性等求出最值, 但需注意, 因为 n 取正整数, 所以 S_n 不一定是在抛物线的顶点处取得最值, 而可能是在离顶点最近的横坐标取正整数的点处取得最值.

13. C 【解析】由题意, 当且仅当 $n=7$ 时 S_n 最大, 所以 $a_7 > 0, a_8 < 0$, 即

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + 6d = 9 + 6d > 0, \\ a_8 = a_1 + 7d = 9 + 7d < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d > -\frac{3}{2}, \\ d < -\frac{9}{7} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3}{2} < d < -\frac{9}{7},$$

所以 $d \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{7}\right)$, 故选 C.

14. ABC 【解析】对 A, 因为等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $d > 0$, 故 **A 正确**;

对 B, 因为 $a_7 = 3a_5$, 所以 $a_1 + 6d = 3(a_1 + 4d)$, 即 $a_1 = -3d < 0$, 故 **B 正确**;

对 D, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 - \frac{7d}{2}n$, 则对应二次函数图象的对称轴方程为 $n = \frac{7}{2}$, 且图象开口向上, 所以当 $n=3$ 或 4 时, S_n 取得最小值, 故 **D 错误**;

对 C, 由 $S_n > 0$, 即 $\frac{d}{2}n^2 - \frac{7d}{2}n > 0$, 即 $n^2 - 7n > 0$, 解得 $n < 0$ (舍去) 或 $n > 7$, 所以 $S_n > 0$ 时, n 的最小值为 8, 故 **C 正确**. 故选 ABC.

15. 1 012 【解析】由 $S_{2\,024} > 0$ 可得 $S_{2\,024} = \frac{2\,024(a_1+a_{2\,024})}{2} = 1\,012(a_{1\,012}+a_{1\,013}) > 0$, 即 $a_{1\,012}+a_{1\,013} > 0$.

由 $S_{2\,025} < 0$ 可得 $S_{2\,025} = \frac{2\,025(a_1+a_{2\,025})}{2} = 2\,025a_{1\,013} < 0$, 即 $a_{1\,013} < 0$, 所以 $a_{1\,012} > 0$.

则数列 $\{a_n\}$ 是前 1 012 项为正数, 从第 1 013 项开始为负数的递减数列, 故当 S_n 最大时, $n=1\,012$.

16. 思路导引 (1) 利用等差数列的通项公式与求和公式的性质计算基本量即可;

(2) 先计算 S_n , 得出 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的通项公式, 由等差数列的定义判定 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 再根据求和公式计算 T_n , 结合二次函数的性质求最值即可.

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_7 = a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 7a_4 = -49$, 得 $a_4 = -7$, 又 $a_8 = 1$, 所以 $a_4 = a_8 - 4d = 1 - 4d = -7$, 得 $d=2$,

则 $a_n = a_4 + (n-4)d = 2n-15$.

(2) 由 (1) 可知 $a_1 = -13$, $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(-13+2n-15)}{2} = n^2 -$

$14n$, 所以 $\frac{S_n}{n} = n-14$,

则 $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = n-14 - (n-1-14) = 1$

($n \geq 2$), $\frac{S_1}{1} = -13$,

即 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 -13 为首项, 1 为公差的等差数列,

则 $T_n = \frac{n(-13+n-14)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 -$

$27n) = \frac{1}{2}\left(n - \frac{27}{2}\right)^2 - \frac{27^2}{8}$ ($n \in \mathbf{N}_+$),

由二次函数的性质可知 $n=13$ 或 $n=14$ 时, T_n 取得最小值 -91 .

刷易错

★易错点 1 错认项数而求和致错

17. C 【解析】易知数列 $1, 4, 7, \dots, 3n+4, 3n+7$ 为等差数列, 且首项为 1, 公差为 3, 项数为 $n+3$, 所以原式 $= \frac{(1+3n+7)(n+3)}{2} = \frac{(n+3)(3n+8)}{2}$.

故选 C.

易错警示 本题的项数为 $n+3$, 易错认为有 n 项.

★易错点 2 忽略零项而致错

18. 12 或 13 【解析】令 $a_n = 26-2n \geq 0$, 解得 $n \leq 13$, 故数列的前 12 项均大于 0, 第 13 项等于 0, 第 13 项后面的项均小于 0. 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项或前 13 项和最大, 故使其前 n 项和 S_n 取最大值的 n 的值为 12 或 13.

易错警示 本题容易漏掉其中的一项而致错, 错因在于忽略零项, 在涉及数列前 n 项和求最值的题目时, 要格外注意是否有零项.

★易错点 3 忽略 n 只能取正整数而致错

19. 5 或 6 【解析】已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 所以 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$,

所以 $S_4 = 4a_1 + \frac{4 \times (4-1)}{2}d = 4a_1 + 6d$,

$S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times (5-1)}{2}d = 5a_1 + 10d$.

又 $8a_1 + S_5 = 110$, $4d + S_4 = 20$,

即 $\begin{cases} 8a_1 + (5a_1 + 10d) = 110, \\ 4d + (4a_1 + 6d) = 20, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 13a_1 + 10d = 110, \\ 4a_1 + 10d = 20, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 10, \\ d = -2, \end{cases}$

所以 $S_n = 10n - n(n-1) = -n^2 + 11n = -\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}$,

根据二次函数的性质知, 当 $n=5$ 或 6 时, S_n 取得最大值 30.

易错警示 因为 n 只能取正整数, 所以在求与数列前 n 项和的最值有关的问题时, 如果求得的 n 不是正整数, 需要分析是 n 的左侧还是右侧取最值.

课时 2 等差数列的前 n 项和(2)

刷基础

1. C 【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_5 = 15, S_{10} = 50$, 由等差数列的片段和性质可知 $S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}$ 成等差数列, 即 $S_5 + S_{15} - S_{10} = 2(S_{10} - S_5)$, 解得 $S_{15} = 3S_{10} - 3S_5 = 3 \times 50 - 3 \times 15 = 105$. 故选 C.

多种解法 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $S_5 = 15$, 所以 $5a_1 + \frac{5 \times (5-1)}{2}d = 15$,

因为 $S_{10} = 50$, 所以 $10a_1 + \frac{10 \times (10-1)}{2}d = 50$,

联立 $\begin{cases} 5a_1 + \frac{5 \times (5-1)}{2}d = 15, \\ 10a_1 + \frac{10 \times (10-1)}{2}d = 50, \end{cases}$

解得 $a_1 = \frac{7}{5}, d = \frac{4}{5}$,

则 $S_{15} = 15 \times \frac{7}{5} + \frac{15 \times (15-1)}{2} \times \frac{4}{5} = 105$. 故选 C.

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 则 $S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}, S_{4n}-S_{3n}, \dots$ 仍成等差数列, 且公差为 n^2d .

2. D 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和是 S_n ,

所以 S_3, S_6-S_3, S_9-S_6 仍成等差数列.

由 $S_3 = 4, a_4+a_5+a_6 = 6$ 知,

$S_6-S_3 = a_4+a_5+a_6 = 6, S_6 = S_3 + a_4+a_5+a_6 = 4+6=10$,

所以 $4, 6, S_9-10$ 成等差数列, 所以 $2 \times 6 = 4 + (S_9-10)$, 解得 $S_9 = 18$. 故选 D.

多种解法 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{则 } a_4 + a_5 + a_6 = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 3a_1 + 12d = 6,$$

所以由 $S_3 = 4, a_4 + a_5 + a_6 = 6$ 得

$$\begin{cases} 3a_1 + \frac{3 \times (3-1)}{2}d = 4, \\ 3a_1 + 12d = 6, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = \frac{10}{9}, \\ d = \frac{2}{9}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times (9-1)}{2}d = 9 \times \frac{10}{9} + \frac{9 \times (9-1)}{2} \times \frac{2}{9} = 18. \text{ 故选 D.}$$

3. A 【解析】项数为 $2m+1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中奇数项共有 $(m+1)$ 项,

$$\text{其和为 } \frac{(m+1)(a_1 + a_{2m+1})}{2} = \frac{(m+1) \cdot 2a_{m+1}}{2} = (m+1)a_{m+1} = 140.$$

项数为 $2m+1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中偶数项共有 m 项, 其和为 $\frac{m(a_2 + a_{2m})}{2} =$

$$\frac{m \cdot 2a_{m+1}}{2} = ma_{m+1} = 120,$$

$$\text{所以 } \frac{(m+1)a_{m+1}}{ma_{m+1}} = \frac{140}{120} = \frac{7}{6}, \text{ 解得 } m = 6. \text{ 故选 A.}$$

二级结论 若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数

为 $2n (n \in \mathbf{N}_+)$, 则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$; 若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n-1$

$(n \in \mathbf{N}_+)$, 则 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$.

4. B 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意可知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项和偶数项都有 n 项,

$$\text{且 } a_2 - a_1 = a_4 - a_3 = a_6 - a_5 = \cdots = a_{2n} - a_{2n-1} = d,$$

$$\text{所以 } S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd = 72 - 90 = -18,$$

$$\text{又 } a_{2n} - a_1 = (2n-1)d = 2nd - d = -33,$$

$$\text{所以 } -36 - d = -33, \text{ 解得 } d = -3. \text{ 故选 B.}$$

5. D 【解析】由等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n}{2n+5}$,

$$\text{可知 } \frac{a_8}{b_8} = \frac{2a_8}{2b_8} = \frac{a_1 + a_{15}}{b_1 + b_{15}} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{15(b_1 + b_{15})} = \frac{2}{2},$$

$$\frac{S_{15}}{T_{15}} = \frac{3 \times 15}{2 \times 15 + 5} = \frac{9}{7}. \text{ 故选 D.}$$

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 则

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}, \frac{a_m}{b_m} = \frac{2n-1}{2m-1} \cdot \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}.$$

6. A 【解析】由等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n + T_n}{T_n} =$

$$\frac{5n+5}{3n+2}, \text{ 可得 } \frac{S_n}{T_n} = \frac{2n+3}{3n+2}.$$

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则其前 n 项和 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 +$

$$\left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n, \text{ 即等差数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和满足 } S_n = An^2 + Bn \text{ 的形式,}$$

$$\text{可设 } S_n = (2n+3) \cdot nk = (2n^2 + 3n)k, T_n = (3n+2) \cdot nk = (3n^2 + 2n)k, \text{ 其中 } k \neq 0,$$

$$\text{则 } a_5 = S_5 - S_4 = (2 \times 5^2 + 3 \times 5)k - (2 \times 4^2 + 3 \times 4)k = 21k,$$

$$b_6 = T_6 - T_5 = (3 \times 6^2 + 2 \times 6)k - (3 \times 5^2 + 2 \times 5)k = 35k, \text{ 所以 } \frac{a_5}{b_6} = \frac{21k}{35k} = \frac{3}{5}. \text{ 故选 A.}$$

7. B 【解析】由等差数列的性质可得

$$\left\{\frac{S_n}{n}\right\} \text{ 为等差数列, 所以 } \frac{S_{2m-1}}{2m-1} + S_1 = 2 \cdot$$

$$\frac{S_m}{m}, \text{ 则 } \frac{S_{2m-1}}{2m-1} - S_1 = 2 \left(\frac{S_m}{m} - S_1\right) = 2.$$

故选 B.

归纳总结 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 a_1 为首项, 数列 $\{a_n\}$ 的公差的一半为公差的等差数列.

8. AB 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} S_3 = 3a_1 + 3d = 18, \\ S_9 = 9a_1 + 36d = 108, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 2. \end{cases}$

对于 A, 数列 $\{a_n\}$ 的公差为 2, **A 正确**;

对于 B, $a_5 = a_1 + 4d = 4 + 4 \times 2 = 12, a_2 = a_1 + d = 4 + 2 = 6$, 则 $a_5 = 2a_2$, **B 正确**;

对于 C, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = 4n + n(n-1) = n^2 + 3n$, 则 $S_6 = 6^2 + 3 \times 6 = 54$, 又 $S_3 = 18$, 故 $S_6 = 3S_3$, **C 错误**;

对于 D, $\frac{S_n}{n} = \frac{n^2 + 3n}{n} = n + 3$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} -$

$$\frac{S_n}{n} = (n+4) - (n+3) = 1, \text{ **D 错误**. 故选 AB.}$$

9. $\begin{cases} -n^2 + 9n, n \leq 5, \\ n^2 - 9n + 40, n \geq 6, \end{cases} n \in \mathbf{N}_+.$

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

$$\text{由题意可得 } \begin{cases} a_1 + 7d = -6, \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 18, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 8, \\ d = -2, \end{cases}$$

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 10 - 2n, n \in \mathbf{N}_+$,

$$\text{则 } S_n = 8n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 + 9n, n \in \mathbf{N}_+.$$

令 $a_n = 0$, 得 $n = 5$, 当 $n > 5$ 时, $a_n < 0$, 当 $n < 5$ 时, $a_n > 0$.

因此当 $n \leq 5$ 时, $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = -n^2 + 9n$;

当 $n \geq 6$ 时, $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = a_1 + a_2 + \cdots + a_5 - a_6 - a_7 - \cdots - a_n = S_5 - (S_n - S_5) = 2S_5 - S_n$,

$$\text{又因为 } S_5 = 45 - 25 = 20,$$

$$\text{所以 } T_n = 40 - (-n^2 + 9n) = n^2 - 9n + 40.$$

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} -n^2 + 9n, n \leq 5, \\ n^2 - 9n + 40, n \geq 6, \end{cases} n \in \mathbf{N}_+.$$

名师点拨 等差数列 $\{a_n\}$ 中有正数项也有负数项, 去绝对值符号前应先分类讨论, 故需先判断出当 $n \leq 5$ 时, $a_n \geq 0$, 当 $n \geq 6$ 时, $a_n < 0$, 再分 $n \leq 5$ 和 $n \geq 6$ 两种情况求解 T_n .

10. B 【解析】 $\because a_n \cdot b_n = 1$,

$$\therefore b_n = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{设数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } S_n, \text{ 则 } S_{100} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{101} = \frac{25}{51}, \text{ 故选 B.}$$

11. B 【解析】因为 $S_n = n^2$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)^2$, 所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$, $a_1 = S_1 = 1$ 也符合上式, 故 $a_n = 2n-1$.

避坑: 此步不可省略

$$\begin{aligned} \text{因此 } \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2}, \\ \text{则 } \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{2005}} + \sqrt{a_{2006}}} &= \frac{1}{2} \times [(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{4011} - \sqrt{4009})] = \frac{1}{2} (\sqrt{4011} - 1). \end{aligned}$$

故选 B.

规律方法 裂项相消法求和的关键是将数列的通项列成两个结构相同的式子之差的形式, 求和时相邻两项相消或隔项相消, 需要特别注意前面几项和后面几项, 找到相消的规律, 保证正确相消, 避免多项或漏项.

常见的裂项技巧

$$(1) a_n = \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) (k \neq 0);$$

$$(2) a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n};$$

$$(3) a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right);$$

$$(4) a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right];$$

$$(5) a_n = \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

刷提升

1. C 【解析】由 $S_3=9, S_6=36$,

得 $a_1+a_2+a_3=3a_2=9, a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=3(a_2+a_5)=36$, 所以 $a_2=3, a_3+a_5=12$, 解得 $a_5=9$. 故选 C.

2. B 【解析】设这个等差数列为 $\{a_n\}$. 由前四项之和为 21, 末四项之和为 67, 得 $4(a_1+a_n)=21+67=88$, 即 $a_1+a_n=22$.

又前 n 项和为 286, 则 $286 = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = 11n$, 所以 $n=26$. 故选 B.

3. D 【解析】因为 $\frac{S_n}{T_{2n}} = \frac{3n}{2n+4}$, 所以 $\frac{S_7}{T_{14}} = \frac{3 \times 7}{2 \times 7 + 4} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$,

所以 $\frac{a_4}{b_3+b_{12}} = \frac{\frac{a_4}{2}}{\frac{b_1+b_{14}}{2}} = \frac{\frac{7 \times 2a_4}{2}}{\frac{14(b_1+b_{14})}{2}} =$

$\frac{7(a_1+a_7)}{14(b_1+b_{14})} = \frac{S_7}{T_{14}} = \frac{7}{6}$. 故选 D.

4. D 【解析】由 $a_n+S_n=2^n$ ①, 可得 $n=1$ 时, $a_1=1$,

$n \geq 2$ 时, $a_{n-1}+S_{n-1}=2^{n-1}$ ②, 则 ①-② 得

$a_n-a_{n-1}+S_n-S_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$,

即 $2a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$, 分别代入 $n=2, 3, 4, 5, \dots, 100$, 再相乘得到

$(2a_2-a_1)(2a_3-a_2) \cdots (2a_{100}-a_{99}) = 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{99} = 2^{1+2+3+\cdots+99} = 2^{\frac{99 \times (1+99)}{2}} = 2^{4950}$. 故选 D.

5. A 【解析】 $\because$ 最上层有 1 个球, 第二层有 3 个, 第三层有 6 个, $\therefore a_{n+1}-a_n=n+1$, 且 $a_1=1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n-a_{n-1}) + (a_{n-1}-a_{n-2}) + \cdots + (a_2-a_1) + a_1 = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$, 又 $a_1=1$ 也

符合该式, $\therefore \frac{a_n}{n} = \frac{n+1}{2}$.

$\therefore a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_{10}}{10} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots + \frac{11}{2} = \frac{10 \times (1 + \frac{11}{2})}{2} = \frac{65}{2}$. 故选 A.

6. A 【解析】由 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}+2$, 得

$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2$,

故数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 首项为 $a_2-a_1=4-1=3$,

所以 $a_{n+1}-a_n=3+2(n-1)=2n+1$,

则 $a_n = (a_n-a_{n-1}) + (a_{n-1}-a_{n-2}) + \cdots + (a_2-a_1) + a_1 = (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + 1 = \frac{n(2n-1+1)}{2} = n^2, n \geq 2$, 显然 $a_1=1$ 满足上式, 则 $a_n=n^2$.

因此 $b_n = \left\lfloor \frac{n(2n+1)}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor 2 + \frac{1}{n} \right\rfloor$, 故

$b_1=\lfloor 3 \rfloor=3$, 当 $n \geq 2$ 时, $2 < 2 + \frac{1}{n} < 3$,

故 $b_n = \left\lfloor 2 + \frac{1}{n} \right\rfloor = 2$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 2 026 项和为 $4+3 \times 2 025=6 079$. 故选 A.

7. ABC 【解析】对于 A, 因为等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_{16} = \frac{16(a_1+a_{16})}{2} = \frac{16(a_8+a_9)}{2} >$

$0, a_9 < 0$, 所以 $a_8 > 0, d = a_9 - a_8 < 0$, A 正确;

对于 B, 由 A 知当 $n=8$ 时, S_n 取得最大值, B 正确;

对于 C, $a_4+a_5+a_{18}=3a_1+24d=3(a_1+8d)=3a_9 < 0$, C 正确;

对于 D, $S_{16} > 0, S_{17} = \frac{17(a_1+a_{17})}{2} =$

$17a_9 < 0$, 故使得 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是 16, D 错误. 故选 ABC.

8. AB 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_{18} \cdot a_{19} < 0$, 得 $(a_1+17d)(a_1+18d) < 0$,

即 $a_1^2+306d^2+35a_1d < 0$, 因此 $35a_1d < -(a_1^2+306d^2)$, 则 $a_1d < 0$.

对于 A, 由 $S_8 = \frac{8(a_1+a_8)}{2} > 0$, 得 $a_1 +$

$a_8 = 2a_1+7d > 0$, 若 $a_1 < 0, d > 0$, 则数列 $\{a_n\}$ 单调递增,

则 $a_{18} < 0, a_1+a_8 < a_1+a_{18} < 0$, 矛盾, 因此 $a_1 > 0$, A 正确;

对于 B, 由 $S_{18} > S_{17} > S_{19}$, 得 $a_{18} > 0 > a_{19} + a_{19}$, 则 $a_{19} < 0, d < 0, a_{17} = a_{18} - d > 0, a_{20} = a_{19} + d < 0$,

而 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20} = 2a_{18}+2a_{19} < 0$, 则 $-a_{19}-a_{20} > a_{17}+a_{18}$, 即 $|a_{19}+a_{20}| > |a_{17}+a_{18}|$, B 正确;

对于 C, 由 $S_{17} = S_{19}$, 得 $S_{19}-S_{17} = a_{18} + a_{19} = 0$, 而 $a_{18} \cdot a_{19} < 0$, 则 a_{18} 与 a_{19} 异号, $S_{37} = \frac{37(a_1+a_{37})}{2} = 37a_{19}$, 而 a_{19} 的

正负不确定, 因此 S_{37} 的符号不确定, C 错误;

对于 D, 由 $S_{19} > S_{17}$, 得 $a_{18}+a_{19} > 0$, 则 $a_{16}+a_{17}+a_{20}+a_{21} = a_{16}+a_{20}+a_{17}+a_{21} = 2a_{18}+2a_{19} > 0$, D 错误. 故选 AB.

9. $\begin{cases} n^2+2, n \text{ 为奇数}, \\ n^2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 【解析】依题意,

$a_n+a_{n+1}=4n, a_{n+1}+a_{n+2}=4n+4$, 两式相减可得, $a_{n+2}-a_n=4$.

因为 $a_1=3$, 且 $a_1+a_2=4$, 则 $a_2=1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项 $a_1=3$, 公差为 4 的等差数列,

同理数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是首项 $a_2=1$, 公差为 4 的等差数列,

所以当 n 为偶数时,

$S_n = (a_1+a_3+\cdots+a_{n-1}) + (a_2+a_4+\cdots+a_n) = 3 \cdot \frac{n}{2} + \frac{\frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2}-1)}{2} \cdot 4 + 1 \cdot \frac{\frac{n}{2} \cdot (\frac{n}{2}-1)}{2} \cdot 4 = n^2$;

同理可得, 当 n 为奇数时,

$S_n = (a_1+a_3+\cdots+a_n) + (a_2+a_4+\cdots+a_{n-1}) = 3 \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{n+1}{2} \cdot (\frac{n+1}{2}-1)}{2} \cdot 4 + 1 \cdot \frac{\frac{n+1}{2} \cdot (\frac{n+1}{2}-1)}{2} \cdot 4 = n^2+2$.

综上所述, $S_n = \begin{cases} n^2+2, n \text{ 为奇数}, \\ n^2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$.

10. 55 【解析】要求满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k=2 025$ 的 k 的最大值, 且 $a_1=9$, 那么若 $\{a_n\} (n=1, 2, \dots, k-1, n \in \mathbb{N}_+)$ 是公差为 1 的等差数列,

则 $a_n = a_1 + (n-1)d = n+8$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} = \frac{(a_1+a_{k-1})(k-1)}{2} = \frac{(9+(k-1)+8)(k-1)}{2} = \frac{(k+16)(k-1)}{2}$, 则 $\frac{(k+16)(k-1)}{2} \leq 2 025$,

当 $k=56$ 时, $a_{k-1}=63$, 此时 $a_k=64$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_k=2 025+64=2 089 > 2 025$, 不满足题意;

当 $k=55$ 时, $a_{k-1}=62$, 此时 $a_k=63$, 则 $a_1+a_2+\cdots+a_k=2 025+63=2 088 > 2 025$, 不满足题意.

综上所述, k 的最大值为 55.

11. $-m-n$ 【解析】 $\because \{a_n\}$ 是等差数列, $\therefore \left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 也为等差数列, 设其公差为 D .

$\therefore \frac{S_{m+n}}{m+n} - \frac{S_m}{m} = nD, \frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m} = (n-m)D$,

$\therefore \frac{S_{m+n}}{m+n} - \frac{S_m}{m} = \frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m}$, 解得 $S_{m+n} = -m-n$.

12. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】不妨设 $m > n$, 则 $S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m + 1$.

$a_m = \frac{(m-n)(a_{n+1}+a_m)}{2} = n-m$,

$\therefore a_1 + a_{m+n} = a_{n+1} + a_m = -2$.

$\therefore S_{m+n} = \frac{(m+n)(a_1+a_{m+n})}{2} = -m-n$.

13. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】因为 $S_{n+1} = 5S_n + 5^{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{S_n}{5^n} = 1$.

因为 $a_1=5$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{5^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{5^n} = n$,

所以 $S_n = n \cdot 5^n$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 5^n - (n-1) \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^{n-1} + 5^n = n \cdot 5^{n-1}$.

14. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】因为 $S_{n+1} = 5S_n + 5^{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{S_n}{5^n} = 1$.

因为 $a_1=5$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{5^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{5^n} = n$,

所以 $S_n = n \cdot 5^n$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 5^n - (n-1) \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^{n-1} + 5^n = n \cdot 5^{n-1}$.

15. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】因为 $S_{n+1} = 5S_n + 5^{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{S_n}{5^n} = 1$.

因为 $a_1=5$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{5^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{5^n} = n$,

所以 $S_n = n \cdot 5^n$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 5^n - (n-1) \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^{n-1} + 5^n = n \cdot 5^{n-1}$.

16. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】因为 $S_{n+1} = 5S_n + 5^{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{S_n}{5^n} = 1$.

因为 $a_1=5$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{5^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{5^n} = n$,

所以 $S_n = n \cdot 5^n$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 5^n - (n-1) \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^{n-1} + 5^n = n \cdot 5^{n-1}$.

17. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】因为 $S_{n+1} = 5S_n + 5^{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{S_n}{5^n} = 1$.

因为 $a_1=5$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{5^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{5^n} = n$,

所以 $S_n = n \cdot 5^n$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 5^n - (n-1) \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^{n-1} + 5^n = n \cdot 5^{n-1}$.

18. $n \cdot 5^n (-\infty, 2]$ 【解析】因为 $S_{n+1} = 5S_n + 5^{n+1}$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{S_n}{5^n} = 1$.

因为 $a_1=5$, 所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{5^n} \right\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\frac{S_n}{5^n} = n$,

所以 $S_n = n \cdot 5^n$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 5^n - (n-1) \cdot 5^{n-1} = (n-1) \cdot 5^{n-1} + 5^n = n \cdot 5^{n-1}$.

$5^{n-1} = (4n+1) \cdot 5^{n-1} (n \geq 2)$, 又 a_1 也满足上式, 所以 $a_n = (4n+1) \cdot 5^{n-1}$.
 因为 $\lambda a_n \leq (n+1)S_n$, 所以 $\lambda(4n+1) \cdot 5^{n-1} \leq (n+1)n \cdot 5^n$, 即 $\lambda \leq \frac{5n(n+1)}{4n+1}$.

令 $f(n) = \frac{5n(n+1)}{4n+1}, n \in \mathbf{N}_+$,

则 $f(n+1) - f(n) = \frac{5(n+1)(n+2)}{4n+5} - \frac{5n(n+1)}{4n+1} = \frac{5n(n+1)(4n+2)}{(4n+5)(4n+1)} > 0$,

所以 $f(n)$ 在 $n \in \mathbf{N}_+$ 时单调递增, 所以 $f(n)_{\min} = f(1) = 2$, 故 $\lambda \in (-\infty, 2]$.

13. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\therefore a_2 + a_5 = 12, a_6 = 11$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 12, \\ a_1 + 5d = 11, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$$

$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$.

(2) 由(1)可知 $a_n = 2n-1$,

$$\therefore b_1 b_n = 2^{11-2n} = 2^{11-(2n-1)} = 2^{12-2n},$$

当 $n=1$ 时, $b_1^2 = 2^{10}$, 又 $\therefore b_1 > 0, \therefore b_1 = 2^5, \therefore b_n = 2^{7-2n}$.

$$\text{则 } T_n = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n = 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^1 \cdots 2^{7-2n} = 2^{5+3+1+\cdots+(7-2n)} = 2^{-n^2+6n}.$$

14. 思路导引 (1) 先对已知等式变形

得到 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 2$, 判定 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 求出 S_n , 再由 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 求出通项公式, 并验证 $n=1$ 时是否成立, 求出 a_n .

(2) 先求出 b_n , 进而得到 $|b_n - 201|$ 的分段表达式, 再分别计算不同段的和得到 T_{20} .

【解】(1) 由题意可得 $nS_{n+1} - (n+1)S_n = 2(n^2+n)$,

$$\text{化简可得 } \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 2,$$

所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{S_1}{1} = \frac{a_1}{1} = 2$ 为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\text{所以 } \frac{S_n}{n} = 2 + 2(n-1) = 2n,$$

$$\text{即 } S_n = 2n^2.$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 4n-2$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$, 满足上式,

所以 $a_n = 4n-2$.

(2) 因为 $b_n = a_n + 2n + 5 = 6n + 3$,

$$\text{所以 } |b_n - 201| = |6n - 17| =$$

$$\begin{cases} 17-6n, 1 \leq n \leq 2, n \in \mathbf{N}_+, \\ 6n-17, n \geq 3, n \in \mathbf{N}_+, \end{cases}$$

$$\text{所以数列 } \{|b_n - 201|\} \text{ 的前 } 20 \text{ 项和 } T_{20} = 11 + 5 + (1+7+13+\cdots+103) = \frac{16+18 \times (1+103)}{2} = 952.$$

悟: 含有绝对值的数列求和时, 需要讨论符号

15. 【解】(1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{1}{8}(a_1 + 2)^2$, 解得 $a_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}_+$ 时, $S_{n-1} =$

$$\frac{1}{8}(a_{n-1} + 2)^2,$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{8}(a_n + 2)^2 -$$

$$\frac{1}{8}(a_{n-1} + 2)^2,$$

$$\text{整理可得 } (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) = 4(a_n + a_{n-1}).$$

$\therefore a_n > 0, \therefore a_n + a_{n-1} > 0, \therefore a_n - a_{n-1} = 4 (n \geq 2), \therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 4 为公差的等差数列,

$$\therefore a_n = 2 + 4(n-1) = 4n-2 (n \in \mathbf{N}_+).$$

$$(2) \therefore b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \cdot$$

$$\left(\frac{4n+2}{4n-2} + \frac{4n-2}{4n+2} \right) = \frac{4n^2+1}{4n^2-1} = 1 + \frac{2}{4n^2-1} =$$

$$1 + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$\therefore T_n = n + \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots +$$

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = n + 1 - \frac{1}{2n+1} =$$

$$n + \frac{2n}{2n+1}.$$

$$(3) \text{ 由 (1) 可得 } c_n = \frac{2^n a_{n-1}}{a_n a_{n+1}} =$$

$$\frac{2^n \times 2(2n-3)}{2(2n-1) \cdot 2(2n+1)} = \frac{2^{n-1}(2n-3)}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$\frac{2^n(2n-1) - 2^{n-1}(2n+1)}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2^n}{2n+1} - \frac{2^{n-1}}{2n-1}$$

($n \geq 2$),

$$\therefore D_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{2^k}{2k+1} - \frac{2^{k-1}}{2k-1} \right) =$$

$$\left(\frac{2^2}{5} - \frac{2^1}{3} \right) + \left(\frac{2^3}{7} - \frac{2^2}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{2^n}{2n+1} - \frac{2^{n-1}}{2n-1} \right) = \frac{2^n}{2n+1} - \frac{2}{3} (n \geq 2).$$

刷素养

16. 【解】 设长度为 4 的等差数列为 $a, a+d, a+2d, a+3d$ (a 为整数, $d \neq 0$ 且 d 为整数), 为使四个数都在集合 M 中, 需满足:

当 $d > 0$ 时, 最大项 $a+3d \leq 2026$, 且首项 $a \geq 1$, 因此 $1 \leq a \leq 2026-3d$, 对应 a 的个数为 $(2026-3d) - 1 + 1 = 2026-3d$;

当 $d < 0$ 时, 设 $d = -k$ ($k > 0$), 则数列为 $a, a-k, a-2k, a-3k$, 所以最小项 $a-3k \geq 1$, 且最大项 $a \leq 2026$, 因此 $3k+1 \leq a \leq 2026$, 对应 a 的个数为 $2026 - (3k+1) + 1 = 2026-3k$.

下面确定公差 d 的取值范围:

当 $d > 0$ 时, 由 $2026-3d \geq 1$, 解得 $d \leq$

$$\frac{2025}{3} = 675, \text{ 因此 } d \text{ 的取值为 } 1, 2, \cdots, 675;$$

当 $d < 0$ 时, $d = -k$, 则 k 的取值与 $d > 0$ 时一致, 即 $k = 1, 2, \cdots, 675$, 对应 $d = -1, -2, \cdots, -675$.

下面计算不同公差下的数列个数:

当 $d > 0$ 时, d 的取值为 $1, 2, \cdots, 675$, 每

个 d 对应 a 的个数为 $2026-3d$, 即每个 d 对应的数列个数为 $2026-3d$, 数列个数构成首项为 2023, 末项为 1, 项数为 675 的等差数列, 根据等差数列求和公式, 此时符合条件的数列个数为 $\sum_{d=1}^{675} (2026-3d) = \frac{675 \times (2023+1)}{2} = 683100$.

由于 $d < 0$ 与 $d > 0$ 是对称关系 (仅公差符号相反, 对应数列个数相同), 因此 $d < 0$ 时符合条件的数列个数也为 683100.

故可以组成公差为 0 且长度为 4 的等差数列的个数为 $2 \times 683100 = 1366200$.

第 5.2 节综合训练

刷能力

1. D 【解析】 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_{m+4} = a_m + 4d = 8 + 4d = 12$, 解得 $d = 1$, 又 $a_2 = 6$, 所以 $a_1 = 5$, 所以 $a_m = 5 + (m-1) \times 1 = m$, 解得 $m = 4$, 所以 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 $S_4 = \frac{4(a_1+a_4)}{2} = \frac{4 \times (5+8)}{2} = 26$. 故选 D.

2. C 【解析】 若 $T_n = 0$, 代入 $a_n - 8T_n = 1$ 得 $a_n = 1$, 则 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ 不成立, 所以 $T_n \neq 0$. 由题意, $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 当 $n=1$ 时, $T_1 = a_1$, 代入 $a_n - 8T_n = 1$ 可得 $a_1 - 8T_1 = 1$, 即 $T_1 - 8T_1 = 1$, 则 $T_1 = -\frac{1}{7}$.

当 $n \geq 2$ 时, $T_{n-1} = a_1 a_2 \cdots a_{n-1}$, 又 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, 所以 $\frac{T_n}{T_{n-1}} = a_n$, 将 $\frac{T_n}{T_{n-1}} = a_n$ 代

入 $a_n - 8T_n = 1$ 可得 $\frac{T_n}{T_{n-1}} - 8T_n = 1$, 又 $T_n \neq 0$, 等式两边同时除以 T_n ,

$$\text{得 } \frac{1}{T_{n-1}} - 8 = \frac{1}{T_n}, \text{ 移项可得 } \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} = -8 (n \geq 2), \text{ 且 } \frac{1}{T_1} = \frac{1}{-\frac{1}{7}} = -7,$$

所以数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是以 -7 为首项, -8 为公差的等差数列, 公差为负数. 故选 C.

3. C 【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 16 项和中奇数项的和为 $S_{\text{奇}}$, 偶数项的和为 $S_{\text{偶}}$, 则 $S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{15}$, $S_{\text{偶}} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{16}$.

根据题意可得 $S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = 640$, 又 $S_{\text{偶}} : S_{\text{奇}} = 11 : 9$, 解得 $S_{\text{奇}} = 288$, $S_{\text{偶}} = 352$.

则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{16} - a_{15}) = 8d = 352 - 288$,

$$\text{解得 } d = \frac{64}{8} = 8. \frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{\frac{8(a_2+a_{16})}{2}}{\frac{8(a_1+a_{15})}{2}} = \frac{a_9}{a_8} =$$

$$\frac{11}{9}. \text{ 故选 C.}$$

4. C 【解析】 由 $a_k^2 - a_{k-1} - a_{k+1} = 0$, 得 $a_k^2 = a_{k-1} + a_{k+1} = 2a_k$, 解得 $a_k = 0$ 或 2.

$$\text{由于 } S_{2k-1} = \frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2} = (2k-1)a_k =$$

1) $\cdot a_k = 22$, 显然 $a_k = 2$, 解得 $k = 6$.
故选 C.

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 有 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$; $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$.

5. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $d > 0$, 则一定存在 $t \in \mathbf{N}_+$ 使得 $a_t > 0$, 则 $a_{t+1} > a_t > 0$, $a_{2t+1} > a_t > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 所以 $a_i + a_{i+1} > 0$,

$$\text{所以 } S_{2t} = \frac{2t(a_1 + a_{2t})}{2} = \frac{2t(a_t + a_{t+1})}{2} > 0,$$

令 $m = 2t \in \mathbf{N}_+$, 则当 $n > m$ 时, 有 $S_n = S_{2t} + a_{2t+1} + a_{2t+2} + \dots + a_n > 0$, 故充分性成立;

反之, 若存在 $m \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > m$ 时, 都有 $S_n > 0$, 该条件不能推出 $\{a_n\}$ 为递增数列.

例如, 取 $a_n = 1$, 则 $d = 0$, $\{a_n\}$ 不是递增数列, 但 $S_n = n$, 取 $m = 1$, 当 $n > 1$ 时 $S_n > 0$ 恒成立, 故必要性不成立.

所以“ $\{a_n\}$ 为递增数列”是“存在 $m \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > m$ 时, 都有 $S_n > 0$ ”的充分不必要条件. 故选 A.

6. ACD 【解析】选项 A: 由题意易知,

$$P_1\left(\frac{1}{2}a_1, \frac{\sqrt{3}}{2}a_1\right), \text{ 则 } \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}a_1}, \text{ 即}$$

$$3a_1^2 - 2a_1 = 0, \text{ 又 } a_1 \neq 0, \text{ 解得 } a_1 = \frac{2}{3}, \text{ 故}$$

A 正确.

选项 B: 易知 $P_{n+1}\left(a_1 + a_2 + \dots + a_n + \frac{1}{2}a_{n+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}\right)$, 即 $P_{n+1}\left(S_n + \frac{1}{2}a_{n+1}, \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}\right)$,

$$\text{则 } \frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1} = \sqrt{S_n + \frac{1}{2}a_{n+1}}, \text{ 即 } S_n = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1}, \text{ 则 } S_{n-1} = \frac{3}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n,$$

$$n \geq 2, \text{ 所以 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} - \left(\frac{3}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{3}{4}a_n^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) = \frac{3}{4}(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n),$$

$$\text{又 } a_{n+1} + a_n \neq 0, \text{ 所以 } a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3},$$

$$n \geq 2, \text{ 又 } a_1 = S_1 = \frac{3}{4}a_2^2 - \frac{1}{2}a_2, \text{ 且 } a_2 > 0, \text{ 解得}$$

$$a_2 = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } a_2 - a_1 = \frac{2}{3}, \text{ 所以数列}$$

$$\{a_n\} \text{ 是以 } a_1 = \frac{2}{3} \text{ 为首项, } \frac{2}{3} \text{ 为公差的}$$

$$\text{等差数列, 所以 } a_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(n-1) = \frac{2}{3}n, \text{ 所以 } a_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1) \neq 2a_n, \text{ 故 B}$$

$$\text{错误.}$$

$$\text{选项 C: } S_n = \frac{n\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}n\right)}{2} = \frac{n(n+1)}{3},$$

$$\text{则 } \frac{1}{S_n} = \frac{3}{n(n+1)} = 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\text{所以数列 } \left\{\frac{1}{S_n}\right\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } 3 \times$$

$$\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 3\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3n}{n+1}, \text{ 故 C}$$

$$\text{正确.}$$

$$\text{选项 D: } S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 - \frac{1}{2}a_{n+1} + a_{n+1} = \frac{3}{4}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1}, \text{ 故 D 正确. 故}$$

$$\text{选 ACD.}$$

7. 思路导引 (1) 利用等差数列通项公式与前 n 项和公式建立方程组, 求出首项与公差, 进而得到通项公式;
(2) 按奇偶分类写出 $\{b_n\}$ 的具体表达式, 再对 n 为偶数和奇数的情况分别求和, 得到分段形式的 T_n ;
(3) 计算 $T_n - S_n$ 的分段表达式, 转化为关于 n 的表达式的最小值问题, 由此求解即可.

【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\text{由题意得 } \begin{cases} (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 35, \\ 4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}d = 24, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 3. \end{cases}$$

$$\text{所以 } a_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2.$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{n(1 + 3n-2)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = (b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_n) = [2 + 6 + 10 + \dots + (2n-2)] + [15 + 27 + \dots + (6n + 3)] = \frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(15+6n+3)}{2} = \frac{4n^2 + 9n}{2},$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{n-2}) + (b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{n-1}) + b_n = [6 + 10 + 14 + \dots + (4n-2)] + [2 + 6 + 10 + \dots + (2n-2)] + 3n = \frac{\frac{n}{2}(6+4n-2)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2} + 3n = \frac{4n^2 + 9n}{2},$$

$$\text{所以 } T_n = \begin{cases} \frac{4n^2 + 9n}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{4n^2 + 9n}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{所以 } T_n - S_n = \begin{cases} \frac{4n^2 + 9n}{2} - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2 + 5n}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{4n^2 + 9n}{2} - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2 + 5n}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\text{所以 } T_n - S_n = \frac{n^2 + 5n}{2} = \frac{n}{2}(n + 5) > \lambda n, \text{ 得 } \lambda < \frac{n + 5}{2}.$$

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时, } \frac{n + 5}{2} \text{ 有最小值 } \frac{9}{2}, \text{ 所以 } \lambda < \frac{9}{2}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n - S_n = \frac{4n^2 + 9n}{2} - \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{n^2 + 5n}{2} > \lambda n, \text{ 得 } \lambda < \frac{n + 5}{2}.$$

$$\text{当 } n = 1 \text{ 时, } \frac{n + 5}{2} \text{ 有最小值 } 3, \text{ 所以 } \lambda < 3.$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

5.3 等比数列

5.3.1 等比数列

刷基础

1. B 【解析】由等比数列的定义可知, 等比数列是根据比值来定义的, 故等比数列的每一项和公比都不能为零, 故①②错误; 一个非零的常数列, 一定是等比数列, 其公比为 1, 故③正确; 由于 $\frac{4^2}{2^2} \neq \frac{6^2}{4^2}$, 故不成等比数列, 故④错误.

敲黑板: 不满足数列中的每一项与它的前一项的比值等于同一个常数

故选 B.

2. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列且通项公式为 $a_n = -2 \times 3^n$, 所以公比 $q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-2 \times 3^n}{-2 \times 3^{n-1}} = 3$, 故选 A.

3. AB 【解析】设等比数列的公比为 q ,

$$\therefore \{a_n\} \text{ 是等比数列, } \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

$$\therefore \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |q|, \therefore \text{数列 } \{|a_n|\} \text{ 是等比数列, 故 A 正确;}$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 是等比数列, } \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \therefore \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q,$$

$$\therefore d > 0, \therefore a_1 = 3, d = 2,$$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b_n = \begin{cases} 2n, & n \text{ 为奇数,} \\ 6n+3, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = (b_1 + b_3 + b_5 + \dots + b_{n-1}) + (b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_n) = [2 + 6 + 10 + \dots + (2n-2)] + [15 + 27 + \dots + (6n + 3)] = \frac{\frac{n}{2}(2+2n-2)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(15+6n+3)}{2} = \frac{4n^2 + 9n}{2},$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } n+1 \text{ 为偶数,}$$

$$T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{4(n+1)^2 + 9(n+1)}{2} - [6(n+1) + 3] = \frac{4n^2 + 5n - 5}{2},$$

$$\therefore T_n = \begin{cases} \frac{4n^2 + 5n - 5}{2}, & n \text{ 为奇数,} \\ \frac{4n^2 + 9n}{2}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$(3) \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, 由 } T_n - S_n = \frac{4n^2 + 9n}{2} - \frac{n(3+2n+1)}{2} = n^2 + \frac{5}{2}n > \lambda n \text{ 得,}$$

$$\lambda < n + \frac{5}{2},$$

$$\text{当 } n = 2 \text{ 时, } n + \frac{5}{2} \text{ 有最小值 } \frac{9}{2},$$

$$\therefore \lambda < \frac{9}{2}.$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n - S_n = \frac{4n^2 + 5n - 5}{2} - \frac{n(3+2n+1)}{2} = n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{5}{2} > \lambda n, \therefore \lambda < n - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = n \text{ 单调递增, } \therefore y = \frac{1}{n} \text{ 单调递减,}$$

$$\therefore y = \frac{5}{2n} \text{ 单调递减, } \therefore y = -\frac{5}{2n} \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore y = n - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2} \text{ 单调递增,}$$

$$\therefore \text{当 } n = 1 \text{ 时, } y = n - \frac{5}{2n} + \frac{1}{2} \text{ 有最小值}$$

$$1 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -1, \therefore \lambda < -1.$$

$$\text{综上所述, 实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } (-\infty, -1).$$

$$\therefore \frac{a_{n+2} \cdot a_{n+1}}{a_{n+1} \cdot a_n} = q^2, \therefore \text{数列 } \{a_n \cdot a_{n+1}\}$$

$$\text{是等比数列, 故 B 正确;}$$

$$\text{不妨令 } a_n = 2^{n-1}, \text{ 则 } \lg a_1^2 = 0, \lg a_2^2 = \lg 4, \lg a_3^2 = \lg 16, \text{ 此时数列 } \{\lg a_n^2\} \text{ 不是等比数列, 故 C 错误;}$$

$$\therefore 2^{n+1} - 2^n = 2^{n+1} - 2^{n+1} \text{ 不一定为一个常数, 故数列 } \{2^{a_n}\} \text{ 不一定是等差数列, 故 D 错误. 故选 AB.}$$

$$\text{归纳总结 判断一个数列是否为等比数列的方法}$$

$$(1) \text{ 定义法: } \frac{a_n}{a_{n-1}} = q (q \neq 0, n \geq 2, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$

$$\text{或 } \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = q (q \neq 0, n \geq 1, n \in \mathbf{N}_+)$$